Über einige

Fundamentalsätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen von mehreren Variabeln.

HABILITATIONSSCHRIFT,

welche

mit Genehmigung der hohen philosophischen Facultät zu Marburg

zur

Erlangung der venia docendi

am 17. Mai 1884, Vormittags 11½ Uhr,

öffentlich vertheidigen wird

Dr. phil. Adolf Kneser.

Marburg
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1884.

Einleitende Inhaltsübersicht.

Bekanntlich hat Herr Weierstrass den Begriff der analytischen Funktion, speciell den der monogenen analytischen Funktion in die höhere Analysis eingeführt, und theils in seiner Vorlesung über analytische Funktionen, theils in der Einleitung zur Vorlesung über Abelsche Funktionen auch auf algebraische Funktionen einer Variabeln angewandt; die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich hauptsächlich mit der Anwendung der genannten Begriffe auf algebraische Funktionen von mehreren Variabeln, allerdings unter Anwendung von Methoden, die in keiner Weise als Verallgemeinerung derjenigen angesehen werden können, welche Herr Weierstrass an den angeführten Stellen benutzt, sondern sich vielmehr den älteren Entwicklungen von Cauchy und Puiseux anschliessen; insbesondere wird durchgehends das Cauchysche Integral gebraucht.

Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, sofern sie in voller Allgemeinheit und Strenge behandelt werden soll, beruht bekanntlich auf den folgenden beiden Sätzen.

I. Die algebraische Gleichung $f(x, y)=0$ definirt dann und nur dann im Gebiete der Grössen x, y ein monogenes analytisches Gebilde, wenn es unmöglich ist, die ganze Funktion $f(x, y)$ als Produkt zweier andern ganzen Funktionen von x und y darzustellen.

II. Ist $f(x_0, y_0) = 0$, so werden alle in der Nähe des Werthepaares (x_0, y) liegenden Werthepaare (x, y), welche der Gleichung $f(x, y) = 0$ genügen, geliefert durch ein oder mehrere Gleichungspaare von Gestalt

$$x - x_0 = t^\alpha$$
$$y - y_0 = c\,t^\beta + c'\,t^{\beta+1} + \ldots$$

wo t einen Parameter bedeutet, und die in der zweiten Gleichung stehende Potenzreihe für alle Werthe von t konvergirt, deren absoluter Betrag eine gewisse positive, von Null verschiedene Grenze nicht übersteigt.

Die vorliegende Abhandlung ergibt nun als Resultat eine Ausdehnung des Satzes I. auf algebraische Funktionen beliebig vieler Variabeln, d. h. den folgenden Satz.

III. Eine algebraische Gleichung

$$f(y, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0$$

definirt dann und uur dann y als monogene analytische Funktion der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$, wenn das Polynom $f(y, x_1, x_2, \ldots x_m)$ keinem Produkte zweier andern ganzen Funktionen von $y, x_1, x_2, \ldots x_m$ gleich ist.

Ohne Benutzung Weierstrassscher Begriffsbildungen und Bezeichnungen ist, unter Voraussetzung eines weiter unten anzuführenden funktionentheoretischen Satzes das aufgestellte Theorem III. mit dem folgenden identisch:

IV. Sind sowohl für

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ \ldots\ x_m = \xi_m$$

als auch für

$$x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ \ldots\ x_m = X_m$$

alle Wurzeln y der Gleichung $f(y, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0$ endlich, bestimmt und von einander verschieden, ist ferner y' irgend eine Wurzel der Gleichung $f(y, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = 0$ und y'' irgend eine Wurzel der Gleichung $f(x, X_1,$

$X_2, \ldots X_m) = 0$, so kann man die Grössen x stetig aus dem Werthsystem ξ in das Werthsystem X derart überführen, dass unterwegs immer alle Wurzeln der Gleichung $f(y, x_1, \ldots) = 0$ endlich, bestimmt und von einander verschieden bleiben und dass y' stetig in y'' übergeht, wenn über f dieselbe Voraussetzung gemacht wird, wie unter III.

Aus dieser zweiten Fassung des Satzes folgt mit Rücksicht auf den Begriff der monogenen analytischen Funktion leicht die erste, wenn man den Satz hinzunimmt, dass die Wurzeln y der Gleichung $f(y, x_1, x_2 \ldots x_m) = 0$ für alle Werthsysteme x einer gewissen Umgebung der Stelle

$$x_1 = \xi_1, \; x_2 = \xi_2, \; \ldots \; x_m = \xi_m$$

nach Potenzen von $x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots x_m - \xi_m$ entwickelt werden können, sobald die Gleichung

$$f(y, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = 0$$

lauter endliche, bestimmte und von einander verschiedene Wurzeln besitzt. Eine Erweiterung dieses Satzes ergab sich im Lauf des Beweises der Sätze III. und IV., der Satz nämlich,

V. dass auch wenn Wurzeln der Gleichung $f(y, \xi_1, \ldots \xi_m) = 0$ einander gleich, unendlich oder unbestimmt werden, doch jede Wurzel, welche sich an der Stelle $x = \xi$ nicht verzweigt, in der Umgebung derselben sich wie eine rationale Funktion verhält, d. h. darstellbar ist als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - \xi_1, \; x_2 - \xi_2, \; \ldots \; x_m - \xi_m$

Da der Beweis des Satzes V. durch vollständige Induktion geführt wurde, so war ein näheres Eingehen auf gewisse bekannte Eigenschaften der algebraischen Funktionen einer Variabeln unumgänglich; insbesondere mag schon hier auf einen sehr einfachen Beweis ihrer Differenzirbarkeit hingewiesen werden, welcher ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen nicht als bekannt voraussetzt.

Der Verfasser wünschte auch eine noch über den Satz V. hinausgehende, vollständige Verallgemeinerung des Satzes II. für mehrere Variabeln zu geben; es erwies sich aber dies vorläufig als zu schwierig, da über die Verzweigungsstellen analytischer Funktionen von mehreren Variabeln zu wenig bekannt ist.

Schliesslich erfüllt der Verfasser die angenehme Pflicht, mit Dank zu erwähnen, dass er für die vorliegende Arbeit einem Gespräch mit seinem verehrten Lehrer Herrn Kronecker vielfache Anregung verdankt.

Erster Theil:

Entwickelungen algebraischer Funktionen in Potenzreihen für beschränkte Gebiete der unabhängigen Variabeln.

§ 1.

Ist an einer bestimmten Stelle

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ \ldots\ x_m = x_m$$

eine bestimmte Wurzel y_1 der Gleichung

$$f = g_0 y^n + g_1 y^{n-1} + \ldots + g_n = 0$$

in welcher $g_0, g_1, \ldots g_n$ ganze Funktionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ bedeuten, keine Doppelwurzel, so giebt es bekanntlich an jeder Stelle x einer gewissen Umgebung der Stelle ξ eine einzige ganz bestimmte Wurzel y der Gleichung $f = 0$, welche, wenn man die Stelle x stetig in die Stelle ξ übergehen lässt, stetig in die Wurzel y_1 übergeht. Durchläuft man also im Gebiet der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$, von einem Werthsystem (0) zu einem andern (1) übergehend, eine stetige Reihe von Werthsystemen, für welche alle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ endlich, bestimmt und von einander verschieden bleiben, so geht jede an der Stelle (0) erhaltene Wurzel der Gleichung $f = 0$ stetig in eine bestimmte an der Stelle (1) erhaltene über.

Nun sei an der Stelle ξ die Wurzel y_1 eine mehrfache; dann giebt es in beliebiger Nähe der Stelle ξ Werthsysteme $(x_1, \ldots x_m)$, für welche alle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ endlich, bestimmt und von einander verschieden sind; irgend ein bestimmtes decselben heissen (0); geht man von (0) aus stetig zu dem Werthsystem ξ über, so gehe eine bestimmte der zu (0) gehörigen Wurzeln der Gleichung $f = 0$, etwa y_0, stetig in y_1

über. Dann sagt man, die Wurzel y_0 verzweige sich in der Umgebung der Stelle ξ, wenn sie bei Durchlaufung stetiger, von der Stelle (0) ausgehender und zu ihr zurückkehrender Wege, längs deren alle Wurzeln der Gleichung $f = 0$ endlich, bestimmt und von einander verschieden bleiben, und welche eine gleich anzugebende Beschaffenheit haben, stetig in eine andere der zu dem Werthsystem (0) gehörigen Wurzeln der der Gleichung $f = 0$ übergeführt werden kann. Jene Wege im Gebiet der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$ sollen bestehen aus einer stetigen geschlossenen Reihe w von Werthsystemen x, bei welcher die Differenzen $x_i - \xi_i$ dem absoluten Betrage nach gegebene positive Grössen nicht überschreiten, und aus einer stetigen, von (0) zu einer Stelle von w gehenden Reihe von Werthsystemen w^1, sodass man sich erst w^1, dann den geschlossenen Weg w, und schliesslich den Weg w^1 in entgegengesetzter Richtung durchlaufen denkt; dabei soll auch der Weg w^1 innerhalb einer Umgebung der Stelle ξ bleiben, für welche die aus y_0 stetig hervorgehende Wurzel y von y_1 beliebig wenig verschieden ist.

Die beliebige algebraische Funktion y kann bekanntlich unter Umständen unendlich oder unbestimmt werden, doch kann man aus ihr eine andere ableiten, bei welcher dies für endliche Werthe der Argumente nicht eintritt. Multiplizirt man nämlich die Gleichung $f = 0$ mit g_0^{n-1}, so erhält man

$$(g_0 y)^n + g_1 (g_0 y)^{n-1} + g_1 g_0' (g_0 y)^{n-2} + \ldots 0;$$

die algebraische Funktion $z = g_0 y$ genügt also einer Gleichung von der Gestalt

$$F = z^n + h_1 z^{n-1} \ldots + h_n = 0$$

in welcher $h_1, h_2, \ldots h_n$ ganze Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$ bedeuten, und deren Wurzeln offenbar für endliche Werthe der Grössen x stets endlich und bestimmt sind.

Wir betrachten zunächst nur solche »ganze algebraische Funktionen« — nach der Bezeichnung des Herrn Kronecker —, wie z.

§ 2.

Die Gleichung $F(z,x)=0$ definire z als ganze algebraische Funktion der einen Variabeln x; für $x=x_0$ sei z_0 eine einfache Wurzel, sodass man setzen kann

$$F(z,x)=A(x-x_0)+B(z-z_0)$$
$$+(x-x_0)G_1+(z-z_0)G_2$$

wo G_1 und G_2 ganze Funktionen von $x-x_0$ und $z-z_0$ bedeuten die für $x=x_0$, $z=z_0$ verschwinden, A und B aber Konstanten sind, deren letztere von Null verschieden ist. Man verstehe nun unter z für alle x einer gewissen Umgebung U von x_0 diejenige bestimmte Wurzel der Gleichung $F(z,x)=0$, welche stetig in z_0 übergeht, wenn man x stetig in x_0 übergehen lässt, sodass x für das Gebiet U zunächst als eindeutige »Funktion« im weitesten Sinne des Wortes definirt ist. Wir zeigen, dass diese Funktion an der Stelle x_0 differenzirbar ist, d. h. dass sich der Quotient

$$\frac{z-z_0}{x-x_0},$$

wenn man x sich dem Werthe x_0 nähern lässt, einer bestimmten endlichen Grösse als Grenze nähert, welche Grösse von dem Wege, auf welchem x gegen x_0 konvergirt, unabhängig ist. Es gilt nämlich die Gleichung

$$(A+G_1)(x-x_0)+(B+G_2)(z-z_0)=0;$$

diese kann man für jedes von x_0 verschiedene x einer gewissen Umgebung von x_0 schreiben

$$\frac{z-z_0}{x-x_0}=-\frac{A+G_1}{B+G_2},$$

denn für hinreichend kleine Werthe von $x-x_0$ ist auch $z-z_0$, mithin auch G_2 beliebig klein, also $B+G_2$ von Null verschieden. Somit folgt

$$\frac{z-z_0}{x-x_0}+\frac{A}{B}=\frac{AG_2-BG_1}{B(B+G_2)},$$

für hinreichend kleine, aber von Null verschiedene Werthe von

$x - x_0$ wird aber die rechte Seite dieser Gleichung beliebig klein, also folgt

$$lim \frac{z - z_0}{x - x_0} = -\frac{A}{B}.$$

Dasselbe Schlussverfahren ist offenbar auf jede andere Stelle x_1 des Gebietes U ebenfalls anwendbar, wenn innerhalb desselben die Grösse z niemals eine mehrfache Wurzel der Gleichung $F = 0$ ist; jedenfalls ist z in einer gewissen Umgebung U^1 von x_0 eine eindeutige Funktion der komplexen Variabeln x mit einem überall bestimmten, endlichen Differenzialquotienten. Man kann also auf diese Funktion in dem Gebiet U^1 die bekannten Cauchyschen Integralsätze anwenden, bei deren strengem Beweis*) nur die einmalige Differenzirbarkeit vorausgesetzt wird, und hieraus in bekannter Weise auf die Entwickelbarkeit von z nach Potenzen von $x - x_0$ schliessen; damit ist z im Gebiet U^1 als Zweig einer analytischen Funktion von x nachgewiesen.

Die Grösse ist z ist nun eindeutig definirt für jedes einfach zusammenhängende Flächenstück in der Ebene der komplexen x, welches x_0, aber keinen Nullpunkt der Diskriminante von z enthält; in der Umgebung jeder Stelle x_1 eines solchen Stückes ist z nach Potenzen von $x - x_1$ entwickelbar, ist also ein in dem ganzen Flächenstück eindeutig definirter und regulärer Zweig einer analytischen Funktion.

Jetzt betrachten wir ein Gebiet G der x-Ebene, welches einen Punkt ξ enthält, in welchem z eine mehrfache Wurzel wird, ohne sich jedoch zu verzweigen; dann ist z an jeder Stelle von G mit Ausnahme von ξ eine reguläre analytische Funktion, deren Werth bei Annäherung von x an den Punkt ξ gegen eine bestimmte, endliche Grösse konvergirt. Man beschreibe im Innern von G um ξ zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und ϱ; es sei

*) Vgl. z. B. Cours de M. Hermite, professé pendant le 2. sémestre 1881—82, rédigé par Andoyer, Paris 1883; p. 53 ff.

$$r > |x_0 - \xi| > \varrho$$

dann ist, wenn man z als Funktionszeichen benutzt, bekanntlich

$$2\pi i z(x_0) = \int_{(r)} \frac{z\,dx}{x - x_0} + \int_{(\varrho)} \frac{z\,dx}{x = x_0}$$

wo das erste Integral über den Kreis mit dem Radius r, das zweite über den mit dem Radius ϱ genommen, und über die Richtung der Integration in bekannter Weise disponirt wird. Das zweite Integral kann bekanntlich ersetzt werden durch jedes Integral

$$\int_{(\varrho_1)} \frac{z\,dx}{x - x_0},$$

genommen über einen Kreis mit dem Radius $\varrho_1 \leqq \varrho$; auf allen diesen Kreisen bleibt aber der Werth von z dem absoluten Betrage nach, unter einer bestimmten endlichen Grenze, der von $x - x_0$ dagegen über einer solchen; mithin wird das Integral unendlich klein, wenn man die Integrationslinie durch Verminderung von ϱ_1 unendlich verkürzt; nun aber hat das Integral einen von ϱ_1 unabhängigen, konstanten Werth, muss also $= 0$ sein. Somit folgt

$$2\pi i z(x_0) = \int_{(r)} \frac{z\,dx}{x - x_0},$$

wo bekanntlich das Integral der rechten Seite nach Potenzen von $x_0 - \xi$ entwickelt werden kann, sodass z als reguläre analytische Funktion von x auch für die Umgebung der Stelle ξ nachgewiesen ist. — Man hat also das Resultat:

> Ein einzelner Werth einer ganzen algebraischen Funktion der einen Variabeln x ist für jedes Gebiet dieser Grösse, innerhalb dessen er sich nicht verzweigt, ein im Innern dieses Gebietes überall regulärer Zweig einer analytischen Funktion von x.

Will man also denselben Satz für Funktionen mehrerer Variabeln beweisen, also den Satz V. der Einleitung für ganze algebraische Funktionen, so braucht man dies für m Variabeln nur unter der Voraussetzung zu thun, dass der Satz für $m-1$ Variabeln als richtig gilt. Dies geschieht im nächsten Paragraphen.

Aus dem eben bewiesenen Satze ziehen wir noch eine Folgerung. Ist z_0 eine einfache Wurzel der Gleichung $F(z, x_0) = 0$ so sind, wenn man wieder für alle x einer gewissen Umgebung von x_0 unter z die mit z_0 stetig zusammenhängende Wurzel der Gleichung $F(z, x) = 0$ versteht, die Differenzialquotienten

$$\frac{d^k z}{dx^k}$$

genommen für $x = x_0$, in der bekannten Weise ausdrückbar als rationale Funktionen dieser beiden Grössen, dividirt durch eine Potenz von

$$\frac{\partial F}{\partial z}$$

für $x = x_0$, $z = z_0$ genommen. Entwickelt man also

$$z - z_0 = a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

und versteht unter R rationale Funktionen, so ist

$$a_k = R_k(x_0, z_0)$$

Ist z_0 eine Doppelwurzel, so erscheinen die rationalen Funktionen R_k unter der Form $0:0$, liefern also die Entwicklungskoeffizienten a nicht mehr. Jede der Grössen $R_k(x, z)$ genügt nun identisch einer algebraischen Gleichung

$$F_k(R_k, x) = 0,$$

deren Wurzeln keineswegs unbestimmt zu werden brauchen, sobald R_k unter der Form $0:0$ erscheint; ist dies auch für $x = x_0$ der Fall, so fragt sich, ob auch jetzt noch

$$F(a_k, x_0) = 0$$

ist. Lässt man ξ_0 in der Umgebung von x_0 variiren, und betrachtet jedesmal die mit der obigen Entwicklung von $z-z_0$ zusammenhängende

$$z-\zeta_0 = a_1(x-\xi_0)+\frac{a_2}{2!}(x-\xi_0)^2+\ldots$$

so ist a_k eine gleich z reguläre analytische Funktion in der Umgebung von x_0; nun genügt diese Funktion für alle x einer gewissen Umgebung von x_0 der Gleichung

$$F_k(a_k, x) = 0$$

also, nach einer bekannten Fundamentaleigenschaft der analytischen Funktionen, auch für $x = x_0$ selbst. — Also gilt der Satz:

Ist im allgemeinen

$$\frac{d^k z}{d x^k} = R_k(x, z)$$

und identisch

$$F_k(R_k, x) = 0;$$

ist ferner z ein in der Nähe der Stelle $x=x_0$ unverzweigter Wurzelwerth, der für $x=x_0$ den Werth z_0 hat, so gilt die Gleichung

$$F_k\left(\frac{d^k z}{d x^k}, x_0\right) = 0$$

wo die Differenzialquotienten für $x=x_0$ zu nehmen sind, auch dann, wenn $R(x_0, z_0)$ die Form $0:0$ hat.

§ 3.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes V. der Einleitung.

Es werde z durch die Gleichung $F(z, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0$ als ganze algebraische Funktion der m Variabeln x definirt; ein einzelner Wurzelwerth z möge sich innerhalb eines zusammenhängenden Bereiches G der Grössen x nicht verzweigen; das Gebiet im Innern von G, für welches dieser Werth von z

eine mehrfache Wurzel der Gleichung $F = 0$ ist, heisse G'; der Theil von G, für welchen dies nicht stattfindet, sei G''.

Nun sei $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ eine Stelle im Innern von G; dann kann man jenfalls für alle x_1 einer gewissen Umgebung von ξ_1 eine ganz bestimmte Entwicklung herstellen von der Gestallt

$$z = z_0 + a_1(x_1 - \xi_1) + a_2(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots,$$

indem man z als Funktion der einen Variabeln x_1 ansieht. Für jede Stelle ξ innerhalb G sind die Grössen $z_0, a_1, a_2, \ldots$ vollkommen bestimmt; gehört die Stelle ξ dem Gebiet G'' an, so sind die Grössen $a_1, a_2, \ldots$ durch $z_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ in der bekannten Weise rational ausdrückbar, z. B.

$$a_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

wo in dem Differenzialquotienten rechts gesetzt wird $z = z_0$, $x_1 = \xi_1, \ldots x_m = \xi_m$, u. s. f. Es werden in diesem Falle auch alle Stellen $\xi_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, für welche die Differenzen $x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \ldots x_m - \xi_m$ dem absoluten Betrage gewisse Grenzen nicht übersteigen, dem Gebiet G'' angehören; für alle diese Stellen nehmen also die rationalen Ausdrücke für die Grössen a nicht die Gestalt $0:0$ an, sondern haben einen von Null verschiedenen Nenner.

Nun benutzen wir, dass der zu beweisende Satz als richtig vorausgesetzt werden kann für ganze algebraische Funktionen von $m - 1$ Variabeln. Es gilt die Gleichung

$$F(z_0, \xi_1, x_2, x_3, \ldots x_m) = 0$$

und z_0 als algebraische Funktion von $x_2, x_3, \ldots x_m$ betrachtet, verzweigt sich natürlich in der Stelle $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_m$ nicht, kann also in ihrer Umgebung entwickelt werden nach Potenzen von $x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \ldots x_m - \xi_m$. Die rationalen Ausdrücke der Grössen a durch $z_0, \xi_1, x_2, \ldots x_m$ sind also Quotienten je zweier Potenzreihen von $x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, \ldots x_m - \xi_m$; der Nenner ist aber für $x_2 = \xi_2, x_3 = \xi_3, \ldots x_m = \xi_m$ von Null ver-

schieden, also kann man die Division der Potenzreihen ausführen, sodass die Grössen a als Potenzreihen von $x_2 - \xi_2$, $\ldots x_m - \xi_m$, also

$$z = z_0 + a_1(x_1 - \xi_1) + a_2(x_1 - \xi_2)^2 + \ldots$$

sich als Potenzreihe von $x_1 - \xi_1$, $x_2 - \xi_2$, $\ldots x_m - \xi_m$ ergiebt.

Jede Grösse a_k genügt nun, wie am Ende des vorigen Paragraphen bemerkt wurde, einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ganze Funktionen von x_2, x_3, $\ldots x_m$ sind; aus der bewiesenen Entwickelbarkeit nach Potenzen von $x_2 - \xi_2$, $\ldots x_m - \xi_m$ folgt demnach, dass a_k ein in dem Gebiet G'' bestimmter, also in dem Gebiet G unverzweigter Zweig einer algebraischen Funktion von x_2, x_3, $\ldots x_m$ ist. Gehört also die Stelle ξ_1, ξ_2, $\ldots \xi_m$ dem Gebiet G' an, so kann man eine Potenzreihe von $x_2 - \xi_2$, $\ldots x_m - \xi_m$ bilden, welche für alle Werthsysteme x_1, x_2, $\ldots x_m$, bei denen die Stelle ξ_1, x_2, $\ldots x_m$ dem Gebiet G'' angehört, der Grösse a_k gleich ist; dann ist die Reihe

$$z_0 + P_1(x_1 - \xi_1) + P_2(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots$$

für jedes System x_2, $\ldots x_m$, bei welchem die Stelle ξ_1, x_2, $\ldots x_m$ dem Gebiet G'' angehört, identisch mit der konvergenten Potenzreihe

$$z_0 + a_1(x_1 - \xi_1) + a_2(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots,$$

hat also jedenfalls einen Konvergenzbereich. Für die oben genannten Werthsysteme x_2, $\ldots x_m$ ist nun

$$z_0 + P_1(x_1 - \xi_1) + \ldots = z$$

also genügt die Potenzreihe links der Gleichung $F = 0$ identisch. Sie stellt ferner für alle Werthsysteme x der Umgebung von ξ, welche dem Gebiet G'' angehören, den bestimmten, von uns betrachteten Zweig der algebraischen Funktion z der; da sich nun der Werth des letzteren auch beim Übergang in das Gebiet G' stetig ändert, so wird er auch hier durch jene Potenzreihe geliefert.

Somit ist z in der Umgebung jeder Stelle $\xi_1, \ldots \xi_m$ des Gebietes G nach Potenzen von $x_1 - \xi_1, \ldots x_m - \xi_m$ entwickelbar; womit der Satz V. der Einleitung bewiesen ist für ganze algebraische Funktionen.

§ 4.

Jetzt ist das Verhalten beliebiger algebraischer Funktionen an allen Stellen, wo sie sich nicht verzweigen leicht zu ermitteln. Ist die Funktion definirt durch die Gleichung

$$g_0 y^n + g_1 y^{n-1} + \ldots + g_n = 0$$

wo $g_0, g_1, \ldots g_n$ ganze rationale Funtionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$ bedeuten, so wurde im § 1 bemerkt, das $g_0 . y = z$ eine ganze algebraische Funktion ist. Verzweigt sich in einem Bereich G der Grössen x ein bestimmter Werth von y nicht, so gilt dasselbe offenbar von dem entsprechenden Werthe der Funktion $z = g_0 y$; dieser letztere ist also an jeder Stelle ξ des Bereichs G Zweig einer regulären analytischen Funktion. Da man ihn nun durch eine ganze, also stets nach Potenzen von $x_1 - \xi_1, \ldots x_m - \xi_m$ entwickelbare Funktion zu dividiren hat, um das entsprechende y zu erhalten, so folgt der Satz:

Verzweigt sich ein bestimmter Werth der algebraischen Funktion y in einem Bereich G der unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_m$ nicht, so ist er an jeder Stelle $\xi_1, \ldots \xi_m$ des Bereichs G darstellbar als Potenzreihe von $x_1 - \xi_1, \ldots x_m - \xi_m$, oder als Quotient zweier solchen Potenzreihen; verhält sich also, auch wo er unendlich oder unbestimmt wird, stets wie eine rationale Funktion.

Zweiter Theil.

Der Zusammenhang der für verschiedene Gebiete gültigen Potenzreihenentwicklungen einer algebraischen Funktion.

§ 5.

Wir betrachten nun die Potenzreihenentwicklungen einer beliebigen algebraischen Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_m$ an allen Stellen S im Gebiet der letzteren Grössen, wo die Werthe von y alle endlich, bestimmt und von einander verschieden sind, und untersuchen den Zusammenhang dieser Entwicklungen, d. h. wir fragen, von wievielen monogenen analytischen Funktionen die erhaltenen Funktionselemente Zweige sind.

Zunächst ist klar, dass die Stellen S ein einziges Continuum bilden; d. h. zwischen irgend zwei Stellen S, z. B. $\xi_1, \ldots \xi_m$ und $X_1, \ldots X_m$ ist immer ein stetiger Übergang durch lauter Stellen S möglich. Denn diese Stellen sind dadurch charakterisirt, dass an ihnen eine gewisse ganze Funktion $D(x_1, \ldots x_m)$ von Null verschieden bleibt; diejenigen Stellen x, welche nicht zu den Stellen S gehören, bilden also nur eine $2m-2$ fache reelle Mannichfaltigkeit, können also die $2m$ fache Mannichfaltigkeit der Grössen $x_1, \ldots x_m$ nicht in getrennte Continua zerlegen.

Alle oben genannten Funktionselemente sind nun offenbar Zweige einer einzigen monogenen analytischen Funktion, wenn man, bei beliebig gewählten Werthsystemen ξ und X stets vom einen zum andern durch Stellen S derart übergehen kann, dass ein gegebener der zu ξ gehörigen Werthe y in einen gegebenen der zu X gehörigen stetig übergeht.

Man zeigt leicht, dass dies der Fall ist, wenn es möglich ist, einen von der Stelle ξ ausgehenden und zu ihr zurückkehrenden Weg durch Stellen S derart zu machen, dass ein gegebener der zu ξ gehörigen Werthe y stetig in einem gegebenen andern derselben übergeführt wird. Denn man nenne die zu ξ gehörigen Werthe von y etwa (1), (2), ... (n), gehe auf irgend einem Wege w durch Stellen S zur Stelle X übere und nenne diejenige der zu letzterer Stelle gehörigen Wurzeln y, welche aus dem Werthe (k) stetig hervorgeht, $[k]$; will man dann (i) in $[k]$ überführen, so führe man erst, was nach Vorausetzung möglich sein soll, (i) in (k) über und durchlaufe dann den Weg w. — Ebenso sieht man, dass wenn für eine Stelle ξ jeder der zugehörigen Werthe y in jeden andern stetig übergehen kann, dasselbe auch für jede andre Stelle S gilt.

Sind nnn wirklich alle unsre Funktionselemente Zweige einer einzigen monogenen analytischen Funktion, so ist leicht zu sehen, dass, wenn y durch die Gleichung $f(y, x_1, \ldots x_m) = 0$, wo f ein von gleichen Faktoren befreites Polynom bedeutet, definirt wird, f keinem Produkte zweier ganzen Funktionen $= g(y, x_1, \ldots x_m)$. $h(y, x_1, \ldots x_m)$ gleich sein kann; denn genügt ein Zweig einer monogenen analytischen Funktion einer Gleichung $g(y, x_1, \ldots x_m) = 0$, so gilt dasselbe von jedem andern Zweige; die Funktionen g und h müssten also bis auf konstante Faktoren übereinstimmen, f also mehrfache Faktoren haben, was ausgeschlossen ist.

Schwieriger ist — für Funktionen mehrerer Variabeln — der umgekehrte Nachweis, dass f zerfällt, sobald die in Rede stehenden Funktionselemente nicht alle Zweige einer einzigen monogenen analytischen Funktion sind.

§. 6.

Man betrachte nun bei irgend einer algebraischen Funktion y alle Umsetzungen ihrer n zu der Stelle $\xi_1, \ldots \xi_m$ gehörigen

Werthe (1), (2), . . . (n), welche erhalten werden, wenn man im Gebiet der Stellen S alle möglichen, von der Stelle ξ ausgehenden und zu ihr zurückkehrenden stetigen und geschlossenen Wege durchläuft. Man schreibe diese Umsetzungen derart übereinander,

$$\begin{array}{c} (1), (2), \ldots (n) \\ (i_1), (i_2), \ldots (i_n) \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

dass unter jeder Grösse (k) der ersten Reihe diejenige Grösse (i_k) steht, in welche sie durch einen der genannten Wege stetig übergeführt wird. Kommen dann in der Vertikalreihe unter (1) etwa nur da Grössen (k_1), (k_2), . . . (k_r) vor, so giebt es, die (1) stetig in (k_1) übergehen kann, natürlich auch geschlossene Wege, welche (k_1) in (1) überführen; d. h. in der Vertikalreihe unter der in der ersten Horizontalreihe stehenden Grösse (k_1) kommt auch (1) vor; ebenso kommen natürlich, da (1) in (k_2), (k_3), . . . übergehen kann, in dieser Vertikalreihe alle Grössen (k_2), (k_3), . . . (k_r) vor, und keine andern, da diese sonst auch mit (1) stetig zusammenhängen, also in der unter der Grösse (1) der ersten Horizontalreihe liegenden Vertikalreihe vorkommen müssten.

Wenn also unter dem Glied (1) der ersten Zeile nicht alle Grössen (2), (3), . . . (n) vorkommen, so zerfallen alle Grössen (1), . . . (n) in Gruppen derart, dass unter einem in der ersten Zeile stehenden Gliede einer bestimmten Gruppe stets nur Glieder dieser Gruppe, diese Glieder aber auch alle vorkommen. Bilden alle Grössen (1), (2), . . . (n) eine einzige Gruppe, so ist klar, dass alle Werthe von y Zweige einer und derselben monogenen analytischen Funktion sind.

Geht man von einer beliebigen Stelle X_1, X_2, . . . X_m statt von ξ aus und bezeichnet die zu X gehörigen Werthe von y mit [1], [2], . . . $[n]$ in derselben Reihenfolge, wie dies p. 18 geschah, so ist das hier erhaltene Schema

$$[1] \ldots . [n]$$
$$[i_1] \ldots . [i_n]$$

wie man leicht sieht, mit dem bei der Stelle ξ erhaltenen völlig identisch; hat man also eine Gruppe von r Gliedern, etwa (1), (2), . . . (r), so giebt es an jeder Stelle X genau r bestimmte Werthe von y, welche mit den Werthen (1), (2), . . . (r) stetig zusammenhängen; alle Funktionselemente, welche Werthe von y darstellen, sind Zweige genau so vieler monogenen analytischen Funktionen, wie die Anzahl der Gruppen beträgt, und die Glieder einer Gruppe sind Zweige einer und derselben monogenen Funktion. Kann man nun zeigen, dass das Produkt

$$\big(y-(1)\big)\ \big(y-(2)\big)\ \ldots\ \big(y-(r)\big)$$

einer rationalen Funktion $R\ (y,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m)$ gleich ist, so weiss man, wenn die algebraische Funktion y durch die Gleichung

$$f = g_0 y^n + g_1 y^{n-1} + \ldots + g_n = 0\ .$$

wo $g_0 \ldots g_n$ ganze Funktionen der x bedeuten, dass $R\ (y,\ x_1,\ \ldots\ x_m)$ durch Multiplication mit einer Potenz von g_0 ganz werden muss, etwa $= g\ (y,\ x_1,\ \ldots\ x_m)$. Dann muss offenbar g ein Faktor von f, letzteres also zerlegbar sein.

Es kommt also nur darauf an zu zeigen, dass die elementaren symmetrischen Funktionen der Glieder einer Gruppe z. B. der Grössen (1), (2), . . . (r), rationale Funktionen der Grössen x sind; ist dies geschehen, so sind die Sätze III. und IV. der Einleitung bewiesen.

§ 7.

Jede symmetrische Funktion der Glieder (1), (2), . . . (r) einer Gruppe genügt einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten, welche rationale Funktionen der Grössen x sind. Beschreibt man nun im Gebiet der Grössen x geschlossene Wege, so gehen die Glieder (1), (2), . . . (r) einer Gruppe stets nur ineinander, eine symmetrische Funktion derselben

also immer wieder in sich selbst über. Letztere ist also ein Zweig einer algebraischen Funktion, der sich im Endlichen nirgends verzweigt, sich also nach § 4. überall wie eine rationale Funktion erhält. Genügt die symmetrische Funktion $\varphi\,\big((1), (2), \ldots (r)\big)$ der Gleichung

$$h_0\,\varphi^t + h_1\,\varphi^{t-1} + \ldots + h_t = 0$$

wo h_0, h_1, $\ldots$ h_t ganze rationale Funktion der Grössen x sind, so ist $h_0\,\varphi$ eine ganze algebraische Funktion, die sich ebenso wie φ, also gar nicht verzweigt, ist also eine eindeutige, überall sich regulär verhaltende analytische Funktion der Grössen x. Eine solche Funktion muss eine beständig konvergente Potenzreihe sein, wie entweder aus allgemeinen funktionentheoretischen Sätzen gefolgert, oder durch folgende einfache Betrachtung gezeigt werden kann.

Für Funktionen e i n e r Variabeln sei der Satz etwa durch das Cauchysche Integral bewiesen; dann schliesst man von $m-1$ auf m Variabeln. Die zu untersuchende Funktion sei $\psi\,(x_1, x_2, \ldots x_m)$; dann sind die nach x_1 genommenen Differenzialquotienten offenbar auch Funktionen, die sich überall regulär verhalten; dasselbe gilt also auch von den Grössen

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k\,\psi\,(0, x_2, x_3, \ldots x_m)}{dx_1^{\,k}};$$

diese sind also beständig convergenten Potenzreihen $P_k\,(x_2, x_3, \ldots x_m)$ gleich. Andererseits ist für jedes festgehaltene Werthsystem x_2, x_3, $\ldots$ x_m die Funktion φ eine beständig convergente Potenzreihe von x_1; der Ausdruck

$$\varphi = P_0\,(x_2, \ldots x_m) + x_1\,P_1\,(x_2, \ldots x_m) + x_1^{\,2}\,P_2\,(x_2, \ldots x_m) + \ldots$$

ist also eine für jedes Werthsystem x_1, x_2, $\ldots$ x_m konvergente Summe. Es fragt sich, ob man ihn, indem man P_0, P_1, $\ldots$ in ihre einzelnen Summanden auflöst, als beständig konvergente Potenzreihe aller Grössen x_1, $\ldots$ x_m schreiben kann.

Um zu zeigen, dass man dies kann, genügt es zu wissen,

dass unsre Reihe für alle x gleichmässig konvergirt, welche den Bedingungen

$$| x_1 | < a_1, | x_2 | < a_2, \ldots | x_m | < a_m$$

genügen, wo die a beliebig grosse positive Grössen bedeuten. Für alle diese Werthsysteme x sei G_i die obere Grenze der Werthe von P_i; dann ist die Reihe

$$G_0 + G_1 x_1 + G_2 x_1^2 + \ldots$$

konvergent, und ihre Glieder sind für die genannten Werthsysteme x nicht kleiner dem absoluten Betrage nach als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$P_0 + P_1 x_1 + \ldots,$$

woraus die gleichmässige Konvergenz der letzteren Reihe folgt. Unsre Funktion ψ muss also eine beständig konvergente Potenzreihe sein; es bleibt nun noch nachzuweisen, dass eine solche keiner algebraischen Gleichung genügen kann, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Grössen x sind, wenn sie sich nicht auf eine ganze rationale Funktion reduzirt. – Für Funktionen einer Variabeln ist dieser Satz bekanntlich daraus zu erweisen, dass eine algebraische Funktion einer Variabeln nie unbestimmt wird, während eine beständig konvergente Potenzreihe für unendlich grosse Werthe des Arguments unbestimmt wird; algebraische Funktionen mehrerer Variabeln können aber bekanntlich unbestimmt werden, sodass jener Beweis nicht ohne weiteres verallgemeinert werden kann. Wir geben im Folgenden zwei Beweise des Satzes, dass eine beständig konvergente Potenzreihe eine ganze rationale Funktion sein muss, wenn sie einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt.

§. 8.

Der Satz sei bewiesen für $m-1$ Variabeln; man ordne die zu untersuchende Reihe $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)$ nach Potenzen und Produkten der $m-1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$

$$\varphi = G_0(x_m) + G_1(x_m)\, x_1 + G_2(x_m)\, x_1 x_2 + \ldots,$$

wo die G_k beständig konvergente Potenzreihen von x_m sind. Setzt man x_m konstant $= c$, so ist $\varphi(x_1, \ldots x_{m-1}, c)$ eine ganze rationale Funktion der Grössen $x_1, \ldots x_{m-1}$. Es müssten also für irgend eine Konstante c alle Grössen $G_k(c)$ von einem gewissen Index $k = k_0$ ab verschwinden. Nun bilden*) alle möglichen Werthe des Index k_0 eine abzählbare Mannichfaltigkeit, dagegen alle möglichen Werthe von c ein zweifach ausgedehntes Continuum; es muss also mindestens e i n e n Index $k_0 = h$ geben, welcher unendlich vielen Werthen von c entspricht, die keine abzählbare Mannichfaltigkeit bilden; da nun aber sämmtliche Nullstellen der abzählbaren Menge konvergenter Potenzreihen $G_h(x_m)$, $G_{h+1}(x_m)$, ... nur eine abzählbare Menge bilden, so müssen nothwendig alle diese Funktionen $G_h, G_{h+1}, \ldots$ identisch $= 0$ sein; es ist also in der Reihe φ nur eine endliche Anzahl von Potenzen der Grösse x_1 vorhanden. Ebenso beweist man natürlich, dass auch von allen andern Variabeln nur endlich viele Potenzen vorkommen.

Unabhängig von den citirten Sätzen des Herrn Cantor beweist man den in Rede stehenden Satz folgendermassen.

Die beständig konvergente Potenzreihe φ sei Wurzel der Gleichung

$$\varphi^s + G_1 \varphi^{s-1} + \ldots + G_s = 0$$

wo die Grössen G ganze Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$ sind. Man setze

$$x_1 = \frac{1}{\xi_1}, \; x_2 = \frac{1}{\xi_2}, \ldots x_m = \frac{1}{\xi_m};$$

dann erhält man, wenn man die Brüche fortschafft, eine Gleichung von der Gestalt

$$\xi_1^a \xi_2^b \ldots \xi_m^r \varphi^s + K_1 \varphi^{s-1} + \ldots + K_s = 0$$

wo die Grössen K ganze Funktionen der ξ bedeuten; setzt man

*) Für das Folgende verweisen wir auf die bekannten Arbeiten von G. Cantor über Punktmannichfaltigkeiten.

$$\varphi . \xi_1^a \xi_2^b \ldots \xi_m^r = \varphi_1 (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$$

so erhält man leicht

$$\varphi_1^s + H_1 \varphi_1^{s-1} + \ldots + H_s = 0$$

wo die Grössen der H ebenfalls ganze Funktionen der ξ sind. Nun ist φ_1 offenbar eine eindeutige und überall endliche Funktion, welche einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt, also nach dem vorigen Paragraphen in eine beständig konvergente Reihe zu entwickeln:

$$\varphi_1 = \sum_{(k)} B k_1 \ldots k_m \xi_1^{k_1} \ldots \xi_m^{k_m};$$

ist also

$$\varphi = \sum A k_1 \ldots x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$$

so folgt

$$\frac{1}{x_1^a \ldots x_m^r} \sum_{(k)} A k_1 \ldots x_1^{k_1} \ldots = \sum_{(k)} B k_1 \ldots k_m \left(\frac{1}{x_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{1}{x_1}\right)^{k_m}$$

Setzt man $x_2, \ldots x_m$ von Null verschiedenen Konstanten gleich, so müssen sich die Summen rechts und links auf eine endliche Anzahl von Gliedern reduziren, sodass man eine Gleichung erhält

$$\frac{G (x_1)}{x_1^a} = H \left(\frac{1}{x_1}\right)$$

wo G und H ganze Funktionen bedeuten; dabei müsste der Grad von $G (x_1)$ offenbar die Zahl a nicht übersteigen. Setzt man also

$$\varphi = \sum_{(t)} x_1^t P_t (x_1 \ldots x_m)$$

so müssen für jedes System konstanter und von Null verschiedener Werthe der Grössen $x_2 \ldots x_m$ alle Grössen $P_t (x_2 \ldots x_m)$ verschwinden bei denen $t > a$ ist; also müssten diese Funktionen identisch $= 0$ sein, es kommt also in der Reihe φ die Grösse x_1 nur bis zur a^{ten} Potenz vor. Da nun ebenso von jeder andern Grösse x bewiesen werden kann, dass sie nur bis zu einer gewissen endlichen Potenz in der Reihe φ vorkommt, so ist unser Satz abermals bewiesen.

Jede eindeutige, einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügende Funktion ist also rational. — Zerfallen also die Wurzeln y der Gleichung $f(y, x_1 \ldots x_m) = 0$ in der früher betrachteten Weise in Gruppen, so sind die symmetrischen Funktionen der Glieder einer Gruppe rationale Funktionen der Grössen $x_1, \ldots x_m$; ferner sind die zu einer Gruppe gehörigen Wurzelwerthe Zweige einer monogenen analytischen Funktion; das Polynom f zerfällt also in so viele Faktoren, wie die Anzahl der monogenen analytischen Funktionen beträgt, deren Zweige sämmtliche Werthe von y sind. Damit sind die Sätze III. und IV. der Einleitung bewiesen.